TD_4 – Intégrales généralisées

Exercice 1 ★★

En utilisant des intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 x^\lambda \ln(x)^n\,\mathrm{d}x$, où $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,
3. $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^\pi (x^2+2x+2)\cos(2x)\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_2^3 (3x^2-4x+1)\ln(x^5-x^4)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\arctan x\,\mathrm{d}x$

Exercice 2 ★★★

En utilisant les changement de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$, $t=\sqrt{x+1}$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x^n+1)}\,\mathrm{d}x$, $t=\dfrac{1}{x}$
3. $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{\mathrm{e}^x}{(3+\mathrm{e}^x)\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x$, $t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$
4. $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\,\mathrm{d}x$, $t=\dfrac{1}{x}$
5. $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ où $a>0$, $t=\dfrac{1}{x}$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(x)\,\mathrm{d}x$, $t=\sin(x)$
7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^7(x)\,\mathrm{d}x$, $t=\tan(x)$

Exercice 3 ★★

Pour n entier naturel, on pose $\displaystyle I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle J_n=\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ et $K_n=nI_n$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
2. Montrer que $\displaystyle K_n=\ln 2-\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.
3. Montrer que $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$ pour t positif ou nul.
4. En déduire un équivalent de I_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 4 ★★

Soit $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \end{array}$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et déterminer f'. En déduire les variations de f.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$. En déduire que $f(x)$ est compris entre $x\ln(2)$ et $x^2\ln(2)$.
4. f peut-elle être prolongée par continuité en 0, en 1 ? Si c'est le cas, le prolongement est-il de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 5 Intégrales de Wallis ★★★

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$,

1. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
2. Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad W_n \leqslant \frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + \varepsilon.$$
3. Justifier ainsi que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$ puis en déduire un équivalent de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Exercice 6 Des sommes de Riemann ★★★

Déterminer les limites suivantes
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$$

Exercice 7 ★★★

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes (en fonction des paramètres le cas échéant)

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+|\cos t|}\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\ln t}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_0^{1}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$;
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$;
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$;
7. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{t^\alpha}{t^\beta+1}\,\mathrm{d}t$;
8. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$.
9. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1-x}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}$
11. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$
12. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)\sqrt{t}}$

Exercice 8 ★★★

Déterminer la nature des intégrales suivantes, puis, en cas de convergence, les calculer

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \ (\sigma \neq 0)$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$.
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+2\sqrt{t}+2)\sqrt{t}}$;
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x$

Exercice 9 Changements de variable ★★

Déterminer la nature, et le cas échéant, calculer la valeur des intégrales suivantes grâce au changement de variable indiqué.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, poser $u = \dfrac{1}{t}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, poser $u = \sqrt{t}$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, poser $x = \dfrac{1}{t}$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$, poser $t = \mathrm{e}^x$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}}$, poser $x = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$

Exercice 10 ★★

Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ et calculer sa valeur par une intégration par parties.

Exercice 11 Intégrale de Fresnel ★★★

À l'aide du changement de variable $u = t^2$, puis d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 12 ★★★★

Montrer qu'on a l'équivalent $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$. On pourra effectuer une intégration par parties.

Exercice 13 ★★

1. Déterminer des réels a, b, c tels que $\dfrac{1}{2t(1+t)^2} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1} + \dfrac{c}{(t+1)^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.
2. On pose $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{(1+x)^3}$. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $\displaystyle\int_{]0,1]} f$.

Exercice 14 ★★★★

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale définissant I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. (a) A l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{u}$, montrer que

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u.$$

   (b) Justifier que l'application $\varphi : u \mapsto u - \dfrac{1}{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que φ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle à préciser.

   (c) En posant $v = u - \dfrac{1}{u}$ dans la dernière intégrale de la question 2a, calculer I_1.

   On pourra observer que $v^2 + 2 = u^2 + \dfrac{1}{u^2}$.

3. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \dfrac{4n-1}{4n} I_n$.
4. Écrire I_n sous forme d'un produit et en déduire la limite de la suite (I_n).

Exercices issus d'oraux

Exercice 15 ★★★

(*Oral 2013*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = \dfrac{1}{t} - \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$

1. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$
2. Prouver que l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge
3. Calculer I

Exercice 16 ★★★

(*Oral 2014,2018*)

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$

1. Étudier la convergence des intégrales I et J.
2. Montrer que $I = J$
3. Calculer $I + J$ à l'aide du changement de variable $u = t - \dfrac{1}{t}$ et en déduire la valeur de I et J.

Exercice 17 ★★★

(*Oral 2017*)

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)^{2n} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que les intégrales I_n sont convergentes.
2. Calculer I_0.
3. Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. En déduire la valeur de I_n.
5. Déterminer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 18 ★★★★

(*Oral 2019*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$
2. Montrer que, pour tout réel $t \in [0, \sqrt{n}]$, $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$ et que, pour tout réel t, $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$

   On pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\,\mathrm{d}t$. On admet que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$
4. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\dfrac{\cos(u)}{\sin(u)}$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n} W_{2n-2}$
5. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n} W_{2n+1}$
6. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

1. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

   On va dériver le $\ln(x)$ et intégrer le $\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$. Soit $u(x) = \dfrac{1}{2(x^2+1)}$ et $v(x) = \ln(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{\ln(x)}{2(x^2+1)}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\ln(2)}{5} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\ln(2)}{5} - \frac{1}{2}\left[\ln(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \frac{5\ln(5) - 13\ln(2)}{20}
\end{aligned}$$

   Ainsi
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5\ln(5) - 13\ln(2)}{20}$$

2. $\displaystyle\int_0^1 x^\lambda \ln(x)^n\,\mathrm{d}x$, où $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

   Notons $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^\lambda \ln(x)^n\,\mathrm{d}x$. Commençons par remarquer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^\lambda \ln(x)^n = 0$, la fonction $x \mapsto x^\lambda \ln(x)^n$ peut alors être prolongée par continuité en 0 par 0 et qu'ainsi I_n est faussement impropre.

   Si $n = 0$ on a $I_0 = \displaystyle\int_0^1 x^\lambda\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda+1}$.

   Si $n \geqslant 1$, on va intégrer le x^λ et dériver le $\ln(x)^n$. Soit $u(x) = \dfrac{x^{\lambda+1}}{\lambda}$ et $v(x) = \ln(x)^n$, on a alors

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 x^\lambda \ln(x)^n\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^{\lambda+1}\ln(x)^n}{\lambda+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\frac{n}{x}\ln(x)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\
&= 0 - \frac{n}{\lambda+1}\int_0^1 x^\lambda \ln(x)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\
&- \frac{n}{\lambda+1} I_{n-1}
\end{aligned}$$

On a donc montré que, pour $n > 0$, $I_n = \dfrac{-n}{\lambda+1} I_{n-1}$. D'où

$$I_n = \frac{-n}{\lambda+1} \times \frac{-(n-1)}{\lambda+1} \times \frac{-(n-2)}{\lambda+1} \times \cdots \times \frac{-1}{\lambda+1} \times I_0 = \frac{(-1)^n n!}{(\lambda+1)^{n+1}}$$

3. $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\mathrm{d}t$

   On va dériver le $\sin(2t)$ et intégrer le $\mathrm{ch}(t)$. Soit $u(t) = \mathrm{sh}(t)$ et $v(t) = \sin(2t)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\mathrm{d}t &= \int_0^\pi u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_0^\pi - \int_0^\pi u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= [\mathrm{sh}(t)\sin(2t)]_0^\pi - 2\int_0^\pi \mathrm{sh}(t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t \\
&= -2\int_0^\pi \mathrm{sh}(t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

   On va faire une deuxième intégration par parties en dérivant le $\cos(2t)$ et en intégrant le $\mathrm{sh}(t)$. Soit alors $a(t) = \mathrm{ch}(t)$ et $b(t) = \cos(2t)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\mathrm{d}t &= -2\int_0^\pi \mathrm{sh}(t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t \\
&= -2\int_0^\pi a'(t)b(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -2\left([a(t)b(t)]_0^\pi - \int_0^\pi a(t)b'(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -2\left([\mathrm{ch}(t)\cos(2t)]_0^\pi + 2\int_0^\pi \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -2\,\mathrm{ch}(\pi) + 2 - 4\int_0^\pi \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

   Ainsi
$$\int_0^\pi \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\mathrm{d}t = -2\,\mathrm{ch}(\pi) + 2 - 4\int_0^\pi \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\,\mathrm{d}t$$
   et donc
$$\int_0^\pi \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\mathrm{d}t = \frac{2 - 2\,\mathrm{ch}(\pi)}{5}$$

4. $\displaystyle\int_0^\pi (x^2+2x+2)\cos(2x)\mathrm{d}x$

   On va faire deux intégrations par parties successives en dérivant d'abord le terme x^2+2x+2 puis le terme $x+1$.

Posons $u(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$, $v(x) = x^2 + 2x + 2$, $a(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2}$ et $b(x) = x + 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (x^2+2x+2)\cos(2x)\mathrm{d}x &= \int_0^\pi v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)] - \int_0^\pi v'(x)u(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{(x^2+2x+2)\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2x+2)\frac{\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^\pi (x+1)\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi b(x)a'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [a(x)b(x)] - \int_0^\pi a(x)b'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{(x+1)\cos(2x)}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi+1}{2} - \frac{1}{2} - \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^\pi (x^2+2x+2)\cos(2x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

5. $\displaystyle\int_2^3 (3x^2-4x+1)\ln(x^5-x^4)\,\mathrm{d}x$

On va intégrer le terme $3x^2-4x+1$ et dériver le terme x^5-x^4. Soit $u(x) = x^3-2x^2+x$ et $v(x) = \ln(x^5-x^4)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_2^3 (3x^2-4x+1)\ln(x^5-x^4)\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_2^3 - \int_2^3 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[(x^3-2x^2+x)\ln(x^5-x^4)\right]_2^3 - \int_2^3 (x^3-2x^2+x)\frac{5x^4-4x^3}{x^5-x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= 12\ln(162) - 2\ln(16) - \int_2^3 x(x-1)^2\frac{x^3(5x-4)}{x^4(x-1)}\,\mathrm{d}x \\
&= 12\ln(2\times 3^4) - 2\ln(2^4) - \int_2^3 (x-1)(5x-4)\,\mathrm{d}x \\
&= 12\ln(2) + 12\times 4\ln(3) - 2\times 4\ln(2) - \int_2^3 5x^2-9x+4\,\mathrm{d}x \\
&= 48\ln(3) + 4\ln(2) - \left[\frac{10x^3-27x^2+4x}{6}\right]_2^3 \\
&= 48\ln(3) + 4\ln(2) - \frac{59}{6}
\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t$

On va dériver $\arctan(t)$ et intégrer 1. Soit $u(t) = t$ et $v(t) = \arctan(t)$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\\ &= [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= x\arctan(x) - \left[\frac{\ln(1+t^2)}{2}\right]_0^x\\ &= x\arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2}\end{aligned}$$

7. $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\arctan x\,\mathrm{d}x$

On va dériver $\arctan(x)$ et intégrer $x+1$. Soit $u(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$ et $v(x) = \arctan(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x+1)\arctan x\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\\ &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\arctan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1+2x-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 1 + \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x + \ln(1+x^2) - \arctan(x)\right]_0^1\\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2

1. Soit $\varphi(x) = \sqrt{x+1}$, on a alors $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et $x = \varphi(x)^2 - 1$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 2x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 (2\varphi(x)^2 - 2)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(2)} 2t^2 - 2\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{2t^3}{3} - 2t\right]_1^{\sqrt{3}}\\ &= \frac{23^{\frac{3}{2}}}{3} - 2\sqrt{3} - \frac{2}{3} + 2\\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

D'où
$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, on a alors $\varphi'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

   D'où
$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x(x^n+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{-x^2\varphi'(x)}{x(x^n+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \frac{-\frac{1}{\varphi(x)^2}\varphi'(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}(\frac{1}{\varphi(x)^n}+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}(\frac{1}{t^n}+1)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-t^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{\ln(1+t^n)}{n}\right]_1^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\ln(2) - \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}{n} \\
&= \frac{\ln(2) - \ln\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)}{n} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)}{n}
\end{aligned}$$

   Ainsi
$$\int_1^2 \frac{1}{x(x^n+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln\left(\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)}{n}$$

3. On pose $\varphi(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$, d'où $\varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}$. On a alors
$$\begin{aligned}
\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{\mathrm{e}^x}{(3+\mathrm{e}^x)\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{2\varphi'(x)}{(3+\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{2\varphi'(x)}{(4+\varphi(x)^2)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\varphi(\ln(2))}^{\varphi(\ln(5))} \frac{2}{4+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_1^2 \\
&= \arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

   D'où
$$\int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{\mathrm{e}^x}{(3+\mathrm{e}^x)\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

4. Posons $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, d'où $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{3}}^{1} -\varphi(x)^2\left(\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{\varphi(x)^3}\right)^{\frac{1}{3}}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\frac{1}{3}}^{1} \varphi(x)\left(\varphi(x)^2-1\right)^{\frac{1}{3}}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\varphi(\frac{1}{3})}^{\varphi(1)} t(t^2-1)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t \\
&= -\left[\frac{3(t^2-1)^{\frac{4}{3}}}{8}\right]_3^1 \\
&= \frac{3\times 8^{\frac{4}{3}}}{8} \\
&= \frac{3\times 2^4}{8} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\,\mathrm{d}x = 6$$

5. Soit $a>0$, on pose $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$, d'où $\varphi'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= -\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)\varphi'(x)}{\frac{1}{x^2}+1}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\varphi(\frac{1}{a})}^{\varphi(a)} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\frac{1}{a}} a\frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

D'où

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

6. On pose $\varphi(x)=\sin(x)$, d'où $\varphi'(x)=\cos(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\varphi(x)^2)^3\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\varphi(0)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)} (1-t^2)^3\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 1-3t^2+3t^4-t^6\,\mathrm{d}t \\
&= \left[t-t^3+\frac{3t^5}{5}-\frac{t^7}{7}\right]_0^1 \\
&= 1-1+\frac{3}{5}-\frac{1}{7} \\
&= \frac{16}{35}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(x)\,\mathrm{d}x = \frac{16}{35}$$

7. On pose $\varphi(x)=\tan(x)$, ainsi $\varphi'(x) = 1+\tan(x)^2 = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^7(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^7(x)\frac{\varphi'(x)}{1+\tan(x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varphi(x)^7}{1+\varphi(x)^2}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\varphi(0)}^{\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{t^7}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(t^2+1)(t^5-t^3+t)-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^5-t^3+t-\frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^6}{6}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}-\frac{\ln(1+t^2)}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\ln(2)}{2} \\
&= \frac{5}{12}-\frac{\ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^7(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{12}-\frac{\ln(2)}{2}$$

Corrigé de l'exercice 3

1. Pour $x \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

Or $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc, par encadrement, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

On remarque que de plus, $I_n + J_n = 1$. Ainsi $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

2. On a $K_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nxx^{n-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x$.

   On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(1+x^n)$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et on a

   $$\forall x \in [0,1], \qquad u'(x) = 1, \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$$

   Par intégration par parties on obtient

   $$K_n = [x\ln(1+x^n)]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$

3. Soit $t > 0$, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $[0,t]$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et

   $$\forall x \in [0,t], \qquad 0 \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1$$

   D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.

4. Par croissance de l'intégrale et la question 3., on obtient

   $$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$

   Ainsi

   $$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   et $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc par encadrement $,\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)dx \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Ainsi, par la question 2., K_n tend vers $\ln 2$. Donc $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln 2}{n}$.

Corrigé de l'exercice 4

1. Soit $0 < x < 1$, alors $0 < x^2 < x < 1$ et donc, pour tout $t \in [x^2, x]$ on a $\ln(t) \neq 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est alors bien définie et continue sur $[x^2, x]$ et $f(x)$ est donc bien définie.

   De même, pour $1 < x$ on a $1 < x < x^2$ et donc, pour tout $t \in [x, x^2]$ on a $\ln(t) \neq 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est alors bien définie et continue sur $[x, x^2]$ et $f(x)$ est donc bien définie.

2. Soit $x \in]0,1[$ et soit $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$. F est dérivable car c'est l'unique primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ sur $]0,1[$ qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$. Alors $f(x) = F(x^2) - F(x)$. f est alors dérivable sur $]0,1[$ en tant que somme de composées de fonctions dérivables et on a

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 2xF'(x^2) - F'(x) \\ &= \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} \\ &= \frac{x-1}{\ln(x)} \end{aligned}$$

   De même, pour $x > 1$ on définit $G(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$. G est dérivable car c'est l'unique primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ sur $]1+\infty[$ qui s'annule en 2. Alors $f(x) = G(x^2) - G(x)$. f est alors dérivable sur $]1,+\infty[$ en tant que somme de composées de fonctions dérivables et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xG'(x^2) - G'(x) \\ &= \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} \\ &= \frac{x-1}{\ln(x)} \end{aligned}$$

3. Pour $x \in]0,1[$ on a $f'(x) > 0$, f est donc strictement croissante sur $]0,1[$. De même, pour $x \in]1,+\infty[$ on a $f'(x) > 0$, f est donc strictement croissante sur $]1,+\infty[$.
4. Soit $x > 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t &= [\ln(\ln(t))]_x^{x^2} \\ &= \ln(\ln(x^2) - \ln(\ln(x)) \\ &= \ln(2\ln(x)) - \ln(\ln(x)) \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

Pour $t \in [x, x^2]$ on a $\dfrac{x}{t} \leqslant 1 \leqslant \dfrac{x^2}{t}$, d'où

$$\frac{x}{t\ln(t)} \leqslant \frac{1}{\ln(t)} \leqslant \frac{x^2}{t\ln(t)}$$

Ainsi

$$\int_x^{x^2} \frac{x}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$x\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant x^2\ln(2)$$

Pour $0 < x < 1$ on a

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t &= [\ln(|\ln(t)|)]_x^{x^2} \\ &= \ln(-\ln(x^2)) - \ln(-\ln(x)) \\ &= \ln(-2\ln(x)) - \ln(-\ln(x)) \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

.

Pour $t \in [x^2, x]$ on a $\dfrac{x^2}{t} \leqslant 1 \leqslant \dfrac{x}{t}$, d'où

$$\frac{x^2}{t\ln(t)} \geqslant \frac{1}{\ln(t)} \geqslant \frac{x}{t\ln(t)}$$

Ainsi

$$\int_{x^2}^{x} \frac{x^2}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x^2}^{x} \frac{x}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$-x\ln(2) \geqslant -f(x) \geqslant -x^2\ln(2)$$

D'où

$$x^2\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant x\ln(2)$$

5. On a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(2) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\ln(2) = 0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

f est donc prolongeable par continuité en 0 par 0.

Pour la limite en 1 on va étudier séparément les limites en 1^- et 1^+.

On a $\lim\limits_{x\to 1^-} x\ln(2) = \ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2\ln(2) = \ln(2)$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ln(2)$$

Et $\lim\limits_{x\to 1^+} x\ln(2) = \ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2\ln(2) = \ln(2)$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln(2)$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ alors f peut être prolongée par continuité en 1 par $\ln(2)$.

Pour savoir si le prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ on va utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

Pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, f se prolonge donc de manière $\mathcal{C}^1$ en 0 par $f'(0) = 0$.

De plus on a, par dérivabilité de la fonction ln en 1, $\dfrac{\ln(x)}{x-1} = \dfrac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1}$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = 1$, f se prolonge donc de manière $\mathcal{C}^1$ en 1 par $f'(1) = 1$.

Corrigé de l'exercice 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on sait que, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \leqslant 1$.

   Ainsi,
   $$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad 0 \leqslant \sin^n(x) \leqslant \sin^{n+1}(x)$$

   D'où, en intégrant, $0 \leqslant W_n \leqslant W_{n+1}$.

   La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

   Supposons par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n = W_{n+1}$, ainsi
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)(1-\sin(x))\,\mathrm{d}x = 0$$

   La fonction $x \mapsto \sin^n(x)(1-\sin(x))$ est alors une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, elle est donc nulle sur ce segment, ce qui est absurde.

   Finalement $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

2. Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$.

   Par croissance de la fonction sin sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a
   $$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad 0 \leqslant \sin^n(x) \leqslant \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$

   $$\begin{aligned}
   W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x \\
   &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x \\
   &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x \\
   &\leqslant \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) + \varepsilon \\
   &\leqslant \frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) + \varepsilon
   \end{aligned}$$

3. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et positive, elle converge donc vers un réel $\ell \geqslant 0$.

   Soit $\varepsilon > 0$, on a $0 \leqslant \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) < 1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+\varepsilon = \varepsilon$.

   Ainsi $0 \leqslant \ell \leqslant \varepsilon$.

   Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\ell = 0$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n+2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n+1}\sin(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[-\sin(t)^{n+1}\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos(t)\sin(t)^n\cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2\sin(t)^n\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin(t)^2)\sin(t)^n\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n+2}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

   I.P.P.

   On dérive le terme $t \mapsto \sin(t)^{n+1}$ et on primitive le terme $t \mapsto \sin(t)$

   On en déduit en particulier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

5. On va procéder par récurrence

   <u>Initialisation :</u>

   Pour $n = 0$ on a $(0+1)W_{0+1}W_0 = 1 \times \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$

   <u>Hérédité :</u>

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $(n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

   Alors
$$(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$$

   Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

   Par décroissance de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a alors

$$W_{n+1}W_n \leqslant W_n^2 \leqslant W_nW_{n-1}$$

   Or $W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ et $W_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$.

   Ainsi, par théorème des gendarmes pour les équivalents, $W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ et donc

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

6. On va commencer par montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

   <u>Initialisation :</u>

   Pour $n = 0$ on a $W_{2\times 0} = W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{(2\times 0)!}{(2^0 0!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{(1\times 1)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

La propriété est donc vérifiée au rang 0.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Alors

$$\begin{aligned} W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+2)(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^2(n+1)^2(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

D'après la question précédente on a $(2n+1)W_{2n+1}W_{2n} = \dfrac{\pi}{2}$, ainsi

$$W_{2n+1} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n+1)I_{2n}} = \frac{\pi}{2}\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\frac{1}{2n+1}\frac{2}{\pi} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Corrigé de l'exercice 6

Notons qu'ici l'énoncé indique qu'il s'agit de sommes de Riemann, mais le plus dur est d'y penser lorsqu'il s'agit de calculer de telles limites sans indications.

1. Pour la première, on reconnaît directement une somme de Riemann, pour la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur le segment $[0,1]$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2).$$

2. Posons $f(t) = \cos^2(t)$.

Si on ne réalise pas qu'on peut faire apparaître artificiellement la constante π qui manque devant la somme, on peut aussi prendre $f(t) = \cos^2(\pi t)$ et l'intégrer entre 0 et 1.

On a alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\pi-0}{n}\sum_{k=}^{n} f\left(\frac{k(\pi-0)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, $\cos^2(t) = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ et donc

$$\int_0^{\pi}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

Méthode

Pour intégrer $\cos^k(x)$ ou $\sin^k(x)$, sauf si un changement de variable est donné, on commence par linéariser à l'aide des formules d'Euler.

3. Faisons apparaître une somme de Riemann en factorisant le dénominateur par n :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}}.$$

On reconnaît alors presque une somme de Riemann, à l'exception du fait que la somme va de 0 à n. Or, le théorème du cours est valable pour des sommes allant de 0 à $n-1$ ou de 1 à n.

Remarque

Ces sommes correspondent au fait que l'on coupe l'intervalle en n morceaux.

Mais on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}}+\frac{1}{n\sqrt{3}}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{3}}=0$.

Posons $f(t)=\frac{1}{\sqrt{1+2t}}$, fonction qui est continue sur le segment $[0,1]$. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(0+(1-0)\frac{k}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\sqrt{1+2t}\right]_0^1=\sqrt{3}-1.$$

Corrigé de l'exercice 7

1. La fonction $f:t\mapsto\frac{1}{1+|\cos(t)|}$ est continue sur $[0,+\infty[$, il n'y a donc d'éventuels problèmes qu'au voisinage de $+\infty$

   Pour $t\in\mathbb{R}$ on a $0\leqslant|\cos(t)|\leqslant 1$, d'où $\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{1+|\cos(t)|}\leqslant 1$.

   Or l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$ diverge, ainsi, par minoration $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+|\cos(t)|}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Méthode

Commencer systématiquement par étudier le domaine de continuité de l'intégrande permet de repérer les problèmes qui vont nécessiter une étude. Ici, l'intervalle est ouvert en 0 et a une borne infinie : il va falloir étudier séparément ces deux problèmes. Et pour cela on coupe l'intervalle en deux.

2. La fonction $t\mapsto\frac{t\ln(t)}{t^3+1}$ est continue sur $]0,+\infty[$, elle est donc impropre au voisinage de 0 et de $+\infty$.

   Par croissances comparées on a $\lim\limits_{t\to0}\frac{t\ln(t)}{t^3+1}=0$. La fonction $t\mapsto\frac{t\ln(t)}{t^3+1}$ est donc prolongeable par continuité en 0, ainsi l'intégrale $\int_0^1\frac{t\ln(t)}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre.

   Par ailleurs on a $t^{\frac{3}{2}}\frac{t\ln(t)}{t^3+1}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Ainsi $\frac{t\ln(t)}{t^3+1}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$.

   Sur $[1,+\infty[$ les fonctions $t\mapsto\frac{t\ln(t)}{t^3+1}$ et $t\mapsto\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ sont positives. Ainsi, par critère de domination pour les fonctions positives, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ converge

   Finalement $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ converge

3. La fonction $t\mapsto\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0,1]$, l'intégrale est donc impropre en 0.

   De plus on a, pour $t\in]0,1]$, $\left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right|\leqslant 1$.

   La fonction $t\mapsto 1$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur cet intervalle, ainsi, par majoration, l'intégrale $\int_0^1\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

   Finalement l'intégrale $\int_0^1\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$ converge

4. La fonction $t\mapsto\frac{\ln(t)}{1-t}$ est continue sur $]0,1[$.

Au voisinage de 1, on a $\ln(t) = \ln(1 + (t - 1))$ avec $t - 1 \to 0$, et donc $\ln(t) \underset{t\to 1}{\sim} t - 1$.

Ainsi $\dfrac{\ln(t)}{1-t} \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{t-1}{1-t} = -1$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t}$ est alors prolongeable par continuité en 1, donc $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre, donc convergente.

Pour $t \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ on a

$$0 \leqslant \left|\frac{\ln(t)}{1-t}\right| \leqslant 2|\ln(t)|$$

Or $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge, ainsi, par critère de majoration, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et donc convergente.

Finalement $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{2t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, l'intégrale est donc impropre seulement en $-\infty$ et $+\infty$.

   On a,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{2t}} \geqslant 0$$
$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{2t}} \underset{t\to-\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}^{-t}} \underset{t\to-\infty}{\sim} \mathrm{e}^{t}$$
$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{2t}} \underset{t\to-\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}^{2t}} \underset{t\to-\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-2t}$$

   Or les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ convergent. Ainsi, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$ convergent et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$ converge.

6. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\arctan t}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$, l'intégrale est donc impropre en 0 et $+\infty$.

   La fonction $t \mapsto \dfrac{\arctan t}{t^\alpha}$ est de plus positive sur $]0, +\infty[$.

   Au voisinage de 0 on a $\dfrac{\arctan t}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$.

   Par critère de Riemann l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement $\alpha - 1 < 1$ i.e. si et seulement si $\alpha < 2$.

   Ainsi, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 2$.

   Au voisinage de $+\infty$ on a $\dfrac{\arctan t}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2t^\alpha}$.

   Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement $\alpha > 1$.

   Ainsi, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

   Finalement l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha \in]1, 2[$.

7. Pour $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ la fonction $t\mapsto \dfrac{t^\alpha}{t^\beta+1}$ est continue sur $]0,1]$, l'intégrale est donc impropre en 0.

Au voisinage de 0 on a $\dfrac{t^\alpha}{t^\beta+1}\underset{t\to0}{\sim} t^\alpha$ si $\beta>0$, $\dfrac{t^\alpha}{t^\beta+1}\underset{t\to0}{\sim} t^{\alpha-\beta}$ si $\beta<0$ et $\dfrac{t^\alpha}{t^\beta+1}=\dfrac{t^\alpha}{2}$ si $\beta=0$.

Toutes les fonctions en jeu sont positives, ainsi,

— Si $\beta\geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{t^\beta+1}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha\,\mathrm{d}t$ ont même nature.

D'où par critère de Riemann, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{t^\beta+1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha>-11$

— Si $\beta<0$ alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{t^\beta+1}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-\beta}\,\mathrm{d}t$ ont même nature.

D'où par critère de Riemann, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{t^\beta+1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha-\beta>-1$

Finalement $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{t^\beta+1}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\beta\geqslant0$ et $\alpha>-1$ ou $\beta<0$ et $\alpha>\beta-1$.

8. La fonction $t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ est continue sur $[2,+\infty[$, l'intégrale est donc impropre en $+\infty$.

La fonction $t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ est de plus positive sur $[2,+\infty[$

On va distinguer plusieurs cas

— Si $\alpha>1$. Posons $\gamma\in]1,\alpha$, alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\gamma\frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}=0$. Ainsi $\dfrac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)$.

Or $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t$ converge, ainsi, par critère de négligeabilité pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge.

— Si $\alpha<1$. Posons $\delta\in]\alpha,1[$, alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\delta\frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}=+\infty.$. Ainsi $\dfrac{1}{t^\delta}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}\right)$.

Or $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^\delta}\,\mathrm{d}t$ diverge, ainsi, par critère de négligeabilité pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}\,\mathrm{d}t$ diverge.

— Si $\alpha=1$ et $\beta\neq1$

Soit $x>2$, on a alors

$$\int_2^x \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{\beta-1}\frac{1}{\ln(t)^{\beta-1}}\right]_2^x=\frac{1}{(\beta-1)\ln(x)^{\beta-1}}-\frac{1}{(\beta-1)\ln(2)^{\beta-1}}$$

Et

$$\lim_{xto+\infty}\frac{\ln(x)^{\beta-1}-\ln(2)^{\beta-1}}{\beta-1}=\begin{cases}-\dfrac{1}{(\beta-1)\ln(2)^{\beta-1}} & \text{si } \beta>1\\ +\infty & \text{si } \beta<1\end{cases}$$

Ainsi $\displaystyle\int_2^x\frac{1}{t\ln(t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\beta>1$

— Si $\alpha=\beta=1$

Soit $x>2$, on a alors

$$\int_2^x\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t=[\ln(\ln(t))]_2^x=\ln(\ln(x))-\ln(\ln(2))\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$

Ainsi $\displaystyle\int_2^x\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ diverge

Finalement $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}$ converge si et seulement $\alpha>1$ ou $\alpha=1$ et $\beta>1$.

Intégrale de Bertrand

Ces intégrales sont des intégrales « usuelles », on les appelle des intégrales de Bertrand. C'est un classique à savoir refaire.

9. La fonction $t \mapsto \dfrac{1-t}{\ln(t)}$ est continue sur $]0,1[$.

   Au voisinage de 1, on a $\ln(t) = \ln(1+(t-1))$ avec $t-1 \to 0$, et donc $\ln(t) \underset{t\to 1}{\sim} t-1$.

   Ainsi $\dfrac{1-t}{\ln(t)} \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{1-t}{t-1} = -1$.

   La fonction $t \mapsto \dfrac{1-t}{\ln(t)}$ est alors prolongeable par continuité en 1, donc $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{1-t}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre, donc convergente.

   Au voisinage de 0, on a $\dfrac{1-t}{\ln(t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

   Et donc $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{1-t}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre, donc convergente.

   Ainsi $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1-t}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ converge.

10. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a $\mathrm{e}^t + 1 \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^t$ et donc $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t}} = \mathrm{e}^{-1/2t}$.

    Mais $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-1/2t}\,\mathrm{d}t$ converge, et ces fonctions sont positives, donc d'après le critère des équivalents, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}}$ converge.

11. La fonction $u \mapsto \dfrac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Au voisinage de 0, on a $\dfrac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} \underset{u\to 0^+}{\sim} u\ln u \underset{u\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

    L'intégrande est donc prolongeable par continuité en 0 : $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ est faussement impropre.

    Au voisinage de $+\infty$, on a $1+u^2 \underset{u\to+\infty}{\sim} u^2$ et donc $\dfrac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{u\ln(u)}{(u^2)^{3/2}} = \dfrac{\ln(u)}{u^2}$.

    Puisque les fonctions sont positives, d'après le critère des équivalents, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.

    Mais $u^{3/2}\dfrac{\ln(u)}{u^2} = \dfrac{\ln(u)}{\sqrt{u}} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que $\dfrac{\ln(u)}{u^2} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u\sqrt{u}}\right)$.

    Puisque $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{u^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ et donc $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ converge.

    Ainsi, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ converge.

12. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+2t)\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc il y a d'éventuels problèmes de convergence en 0 et en $+\infty$.

    Au voisinage de 0, $\dfrac{1}{(1+2t)\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

    Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc par critère de comparaison pour les fonctions positives, il en est de même de $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)\sqrt{t}}$.

    Au voisinage de $+\infty$, on a $\dfrac{1}{(1+2t)\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t^{3/2}}$. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}$, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)\sqrt{t}}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)\sqrt{t}}$ converge.

Corrigé de l'exercice 8

1. La fonction $t \mapsto te^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, on a, pour $A>0$,

$$\int_0^A te^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} = \left[\frac{-\sigma^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}\right]_0^A = \frac{\sigma^2}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{\sigma^2}}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sigma^2}{2}.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\sigma^2}{2}$.

2. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $A>0$, on a

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}\right]_0^A = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-A}} - \mathrm{e}^{-1} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1-\mathrm{e}^{-1}.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $1-\mathrm{e}^{-1}$.
De même, pour $B<0$,

$$\int_B^0 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}\right]_B^0 = \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-B}} \underset{B\to-\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1}.$$

Et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut e^{-1}.

On en déduit donc que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $1-\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{-1}=1$.

3. La fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{-2t}\cos(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
De plus, pour $t \geqslant 0$, on a $|\mathrm{e}^{-2t}\cos(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-2t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\sin(x) - \mathrm{e}^{-2\times 0}\sin(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -2\mathrm{e}^{-2x}\cos(x) - (-2\mathrm{e}^{-\times 0}\cos(0) = 2$.
On va donc pouvoir procéder à deux intégrations par parties successives, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t &= 0-0+\int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-2t}\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0+2-\int_0^{+\infty}4\mathrm{e}^{-2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Remarque
Si l'on doit procéder à une double intégration par parties, on prendra soin de dériver deux fois le même terme, et pas d'intégrer la deuxième fois le terme intégré la première fois, ce qui aurait pour effet de revenir à l'intégrale de départ.
Ici, nous avons dérivé l'exponentielle la première fois, il faut donc dériver de nouveau l'exponentielle la seconde fois.

Et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{5}$

4. La fonction $t\mapsto \dfrac{1}{t(t+1)}$ est continue sur $[1,+\infty[$, et pour tout $t\geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+1}$.
Donc pour $A>1$,

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^A\frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^A\frac{\mathrm{d}t}{t+1} = [\ln t]_1^A - [\ln(1+t)]_1^A = \ln(2) - \ln\left(1+\frac{1}{A}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).$$

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$ converge et vaut $\ln(2)$.

5. On va poser ici le changement de variable $u = \sqrt{t}$. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Le changement de variable est donc légitime, ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+2\sqrt{t}+2)\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}u}{u^2+2u+2}$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

   De plus, pour $A > 0$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{2\mathrm{d}u}{u^2+2u+2} &= \int_0^A \frac{2\mathrm{d}u}{1+(u+1)^2} \\ &= [2\arctan(u+1)]_0^A \\ &= 2\arctan(A+1) - \frac{\pi}{2} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \pi - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

   Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+2\sqrt{t}+2)\sqrt{t}}$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

6. La fonction $t \mapsto \dfrac{t\ln(t^2)}{1+t^4}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et impaire.

   Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ converge, et si c'est le cas, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = 0$.
   Il y a des problèmes de convergence en 0 et en $+\infty$.
   Au voisinage de 0, on a

$$\frac{t\ln(t^2)}{1+t^4} = \frac{2t\ln(|t|)}{1+t^4} \underset{t\to0}{\sim} tln(|t|) \underset{t\to0}{\longrightarrow} 0.$$

   Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre, donc converge.
   Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{t\ln(t^2)}{1+t^4} = \frac{2t\ln t}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln t}{t^3}.$$

   On a alors $t^2\dfrac{t\ln(t^2)}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln t}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Et donc $\dfrac{t\ln(t^2)}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, de sorte que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ converge.
   On en déduit donc que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

7. La fonction $t \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\dfrac{1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, et elle y est impaire.

   Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ converge.
   Au voisinage de 0, on a $\dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{1}{t^2}\right) = -\dfrac{2\ln(t)}{t}$.
   Mais pour $x \in]0,1]$,

$$\int_x^1 \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\ln(t)^2\right]_A^1 = -(\ln(A))^2 \underset{A\to0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

   Et donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. On en déduit donc que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ diverge.

8. Commençons par remarquer que la fonction $x \mapsto \ln(1+\tan(x))$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x$ converge donc.

Attention

L'imparité d'une fonction n'implique pas automatiquement que son intégrale est nulle : encore faut-il que cette intégrale converge, il faut donc d'abord étudier sa nature.

Intervalles

Attention : $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle, mais l'union de deux intervalles : $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.
Il y a donc aussi un éventuel problème de convergence au voisinage de 0.

On va poser le changement de variable affine $t = \frac{\pi}{4} - x$.

On sait que, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(t)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan(t)} = \frac{1 - \tan(t)}{1 + \tan(t)}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x))\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 - \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - \tan(t)}{1 + \tan(t)}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan(t)}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2) - \ln\left(1 + \tan(t)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{4}\ln(2) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan(t)\right)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ainsi $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan(t)\right)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\ln(2)$ d'où

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan(t)\right)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}\ln(2)$

Corrigé de l'exercice 9

1. La fonction $t \mapsto \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}$ est continue et positive sur $[1; +\infty[$.
   Or, pour tout $t \geqslant 1$, on a
   $$0 \leqslant \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{t^2}.$$
   Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
   Et alors, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ réalisant une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$, avec $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$, il vient
   $$\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_1^0 \frac{\text{Arctan}(u)}{\frac{1}{u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int_0^1 \text{Arctan}(u)\,\mathrm{d}u.$$
   Afin de calculer cette dernière intégrale, procédons à une intégration par parties

   sur le segment $[0, 1]$:
   $$\int_0^1 \text{Arctan}(u)\,\mathrm{d}u = [t\text{Arctan}(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{u}{1 + u^2}\,\mathrm{d}u = \text{Arctan}(1) - \left[\frac{1}{2}\ln(1 + u^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$$

Méthode

On n'oublie pas de vérifie la **stricte monotonie** du changement de variable.

Arctan

Inutile d'apprendre par cur une primitive de Arctan, mais il est bon de savoir qu'on peut en obtenir une par intégration par parties

2. Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et strictement croissant. Donc le changement de variable est justifié.
   On a alors $u^2 = t$ et donc $2u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, et, sous réserve de convergence de l'une des deux intégrales, on a
   $$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} u\,\mathrm{d}u.$$
   Mais la seconde intégrale se calcule explicitement : elle converge et vaut 1, de sorte que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 2.

3. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et elle y est strictement décroissante. Le changement de variable est donc légitime.
De plus, si $x = \dfrac{1}{t}$, alors $t = \dfrac{1}{x}$ et donc $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$.
Sous réserve de convergence, on a alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln(1/x)}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Et donc, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, si elle existe, est égale à son propre opposé, et donc est nulle.
Il reste donc à étudier la convergence de cette intégrale.

Convergence
D'après le théorème de changement de variable, il faut étudier au moins l'une des deux intégrales : celle avant changement de variable, ou celle obtenue après le changement de variable. Ici elles sont égales.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0; +\infty[$.
Au voisinage de 0, on a $\dfrac{\ln t}{1+t^2} \underset{t\to 0^+}{\sim} \ln(t)$, et le cours nous dit que $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge.

Par critère de comparaison pour les fonctions de signe constant(ici les fonctions sont **négatives** sur $]0, 1]$), on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
Au voisinage de $+\infty$, on a $\dfrac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^2}$.
Mais $t^{3/2}\dfrac{\ln(t)}{t^2} = \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ et donc $\dfrac{\ln t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t\sqrt{t}}\right)$.
Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$, et donc, par critère de comparaison pour les fonctions positives, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, et donc de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

C'est une intégrale de Riemann convergente : $\alpha = 3/2$.
$\dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est positive sur $[1, +\infty[$.

On en déduit donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

4. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et elle y est strictement croissante. Le changement de variable est donc légitime. On a $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$
De plus, pour $x > 0$ on a $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$
D'après la formule de changement de variable, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et, en cas de convergence, sont égales.
Or, pour $A > 0$ on a

$$\int_0^A \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan(A) - \arctan(0) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

5. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et elle y est strictement décroissante. Le changement de variable est donc légitime. On a $\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$
Pour $t > 0$ on a

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-t}}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{1-\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)^2}}$$

D'après la formule de changement de variable, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature et, en cas de convergence, sont égales.

On a, pour $A > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= [2\arcsin(x)]_0^A \\ &= 2\arcsin(A) - 2\arcsin(0) \\ &\underset{A\to 1}{=\longrightarrow} \pi\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t - 1}}$ converge et vaut π.

Corrigé de l'exercice 10

et à valeurs positives La fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Au voisinage de $+\infty$, on a $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, donc, par comparaison à une intégrale de Riemann, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ converge.

Au voisinage de 0, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -2\ln(x)$, et on sait que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ converge, ainsi $\displaystyle\int_0^1 \ln(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ converge.

On va procéder à une intégration par parties, en posant $u(x) = x$ et $v(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$, qui sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{-2\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{-2}{1+x^2}\dfrac{1}{x}$.

On a de plus

$$u(x)v(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$u(x)v(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x\ln\frac{1}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -2x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) - \lim_{x\to 0^+} u(x)v(x) + \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

On a déjà vu que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \pi$.

Corrigé de l'exercice 11

Comme indiqué, procédons au changement de variable $u = t^2$. Ce changement de variable est bien légitime car $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement croissant.

Alors $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$, et $\displaystyle\lim_{t\to 0} t^2 = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 = +\infty$.

Par conséquent, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, nous devons donc étudier la nature de la seconde intégrale.

La fonction $u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc il y a d'éventuels problèmes de convergence en 0 et en $+\infty$.

Or, au voisinage de 0, on a $\dfrac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} \underset{u\to 0^+}{\sim} \dfrac{u}{2\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} \underset{u\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Alors $u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}$ se prolonge par continuité en 0 et ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ est faussement impropre et donc convergente.

Pour étudier $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ on va procéder à une intégration par parties.

Posons $a : u \mapsto -\cos(u)$ et $b : u \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$. a et b sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ et $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} a(u)b(u) = 0$.

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} a'(u)b(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} a(u)b'(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{4u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ ont même nature.

Or, pour $u \geqslant 1$ on a $\left|\dfrac{\cos(u)}{4u^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ est une intégrale de Riemann convergente. Ainsi, par domination, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{4u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ converge absolument et donc converge.

On en déduit alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ et donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge bien.

> **Rédaction**
> En étudiant le comportement de la fonction au voisinage de 0, on s'intéresse au problème éventuel de convergence en 0, et pas en $+\infty$. Donc on peut écrire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ (ou plus généralement que pour tout $a > 0$, $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$) converge, mais pas $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

Corrigé de l'exercice 12

Soit $x > 0$, commençons par prouver la convergence de cette intégrale. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, le seul problème est donc au voisinage de$+\infty$.

Pour $t \geqslant 1$ on a $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, ainsi, par majoration, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ aussi.

posons $u : t \mapsto \dfrac{-1}{2t}$ et $v : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$.

On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, une intégration par parties nous donne alors

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_x^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) - u(x)v(x) - \int_x^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt\right)$.

On peut pour cela revenir à la définition, on sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^2} = 0$, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x > 0, \forall t > x, 0 < \frac{1}{2t^2} \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 > 0$ tel que, pour $t > x_0$, $0 < \dfrac{1}{2t^2} \leqslant \varepsilon$

Soit $x > x_0$, pour tout $t > x$ on a donc également $0 < \dfrac{1}{2t^2} \leqslant \varepsilon$.

En multipliant par $\mathrm{e}^{-t^2} > 0$, on a $0 < \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2} \leqslant \varepsilon \mathrm{e}^{-t^2}$.

D'où, par croissance de l'intégrale ,

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$0 \leqslant \frac{\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t} \leqslant \varepsilon$$

On a alors montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 > 0$ tel que, pour tout $x > x_0$,

$$0 \leqslant \frac{\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t} \leqslant \varepsilon$$

En d'autres termes on a montré que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t} \leqslant= 0$, ou encore $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}dt \underset{+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt\right)$.

Finalement $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$.

Corrigé de l'exercice 13

1. Les résultats sur la décomposition en éléments simples nous assure qu'il existe un unique triplet $(a, b, c,) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 0\}, \qquad \frac{1}{2t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{(t+1)^2}$$

On a alors, en multipliant par t

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 0\}, \qquad \frac{1}{2(1+t)^2} = a + \frac{bt}{t+1} + \frac{ct}{(t+1)^2}$$

D'où, en faisant tendre t vers 0, on obtient $a = \dfrac{1}{2}$.

> **Remarque**
> Techniquement on peut pas évaluer cette relation en 0 puisqu'elle découle d'une relation qui n'est pas vraie (et n'a pas de sens) en 0. Par contre on peut faire tendre t vers 0 ce qui nous amène au même résultat.

De même on a

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 0\}, \qquad \frac{1}{2t} = \frac{(1+t)^2}{2t} + b(t+1) + c$$

D'où, en faisant tendre t vers -1, $c = -\dfrac{1}{2}$.

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 0\}, \qquad \frac{1}{2t(1+t)^2} = \frac{1}{2t} + \frac{b}{t+1} - \frac{1}{2(t+1)^2}$$

En évaluant par exemple en $t = 1$ on obtient $b = -\dfrac{1}{2}$

2. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$ est montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

Puisque, pour tout $t \in]0, 1]$ $\dfrac{\ln(t)}{(1+t)^3} \leqslant 0$ il nous faut donc montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$ converge.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{(1+t)^3}$ est continue sur $]0, 1]$, l'intégrale est donc impropre en 0.

Au voisinage de 0 on a $\dfrac{-\ln(t)}{(1+t)^3} \underset{t\to0}{\sim} -\ln(t)$. Or $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge, ainsi, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$ converge. f est donc bien intégrable.

On va procéder à une intégration par parties pour calculer $\displaystyle\int_{]0,1]} f$.

Posons $u : x \mapsto \dfrac{-1}{2(1+t)^2}$ et $v : x \mapsto \ln(x)$. Soit $\varepsilon \in]0,1]$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t &= \int_\varepsilon^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\ln(\varepsilon)}{2(1+\varepsilon)^2} + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{2t(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\ln(\varepsilon)}{2(1+\varepsilon)^2} + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{2t} - \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2(t+1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\ln(\varepsilon)}{2(1+\varepsilon)^2} + \left[\frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(t+1)}{2} + \frac{1}{2(t+1)}\right]_\varepsilon^1 \\
&= \frac{\ln(\varepsilon)}{2(1+\varepsilon)^2} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln(\varepsilon)}{2} + \frac{\ln(\varepsilon+1)}{2} - \frac{1}{2(\varepsilon+1)}
\end{aligned}$$

I.P.P.

On ne va pas pouvoir ici faire notre I.P.P. directement sur $]0,1]$ car $\lim\limits_{x\to 0} u(x)v(x) = -\infty$. On va donc faire notre I.P.P. sur $[\varepsilon, 1]$ puis faire tendre ε vers 0 dans le résultat final.

Or

$$\frac{\ln(\varepsilon)}{2(1+\varepsilon)^2} - \frac{\ln(\varepsilon)}{2} = \frac{(\varepsilon^2+2\varepsilon)\ln(\varepsilon)}{2(1+\varepsilon)^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t = -\frac{1+2\ln(2)}{4}$$

C'est-à-dire $\displaystyle\int_{]0,1]} f = -\frac{1+2\ln(2)}{4}$.

Corrigé de l'exercice 14

1. La fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^4)^n}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{4n}}$.

   Par comparaison à une intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ existe et donc, par continuité de f_n sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ aussi

2. (a) La fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante.

   D'après le théorème de changement de variable, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ converge alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{u^4}}\frac{1}{u^2}du$ converge et

   $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{u^4}}\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

   Ainsi $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$ Puis

   $$I_1 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^4)}\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$$

(b) La fonction $\varphi : u \mapsto u - \dfrac{1}{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle y est continue, strictement croissante, $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$, ainsi d'après le théorème de la bijection continue, φ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

(c) φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ donc un changement de variable légitime. Pour $u \neq 0$ on a $\varphi'(u) = 1 + \dfrac{1}{u^2}$. Remarquons de plus que $\varphi(u)^2 + 2 = u^2 - 2 + \dfrac{1}{u^2} + 2 = u^2 + \dfrac{1}{u^2}$. Alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\left(1+\frac{1}{u^2}\right) du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{u^2}+u^2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+v^2}\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

Or une primitive de $v \mapsto \dfrac{1}{2+v^2}$ est $v \mapsto \dfrac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\dfrac{v}{\sqrt{2}}\right)$.

On en déduit que $I_1 = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$.

3. On sait que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^n}\,\mathrm{d}x$.

On pose $a : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^4)^n}$ et $b : x \mapsto x$. a et b sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et, pour $x > 0$, $a'(x) = -\dfrac{4nx^3}{(1+x^4)^{n+1}}$ et $v'(x) = 1$.

De plus $\lim_{x\to+\infty} a(x)b(x) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^n}\,\mathrm{d}x \\ &= 0 - 0 - 4n\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(1+x^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^4+1-1}{(1+x^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= 4n\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^n}\,\mathrm{d}x - 4n\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= 4nI_n - 4nI_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi $I_{n+1} = \dfrac{4n-1}{4n} I_n$.

4. On en déduit que

$$I_n = I_1 \prod_{p=1}^{n-1} \frac{4p-1}{4p} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{4p-1}{4p}$$

D'où, puisque tous les termes du produit sont positifs

$$\ln(I_n) = \ln\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) + \sum_{p=1}^{n-1} \ln\left(\frac{4p-1}{4p}\right) = \ln\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) + \sum_{p=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{4p}\right)$$

Or, $\ln\left(1-\dfrac{1}{4p}\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4p}$, la série de terme général $-\dfrac{1}{4p}$ diverge, et la suite $\left(\ln\left(1-\dfrac{1}{4p}\right)\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est de signe constant.

Ainsi par critère de comparaison pour les séries de signe constant, la série de terme général $\ln\left(1-\frac{1}{4p}\right)$ diverge, et $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{n-1}\ln\left(1-\frac{1}{4p}\right)=-\infty$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\ln(I_n)=0$, ce qui entraine $\lim_{n\to+\infty} I_n=0$.

Corrigé de l'exercice 15

D.L.

Il suffit de primitiver le D.L $\frac{1}{1+t^2} \underset{u\to 0}{=} 1-u^2+o(t^2)$

1. On sait que $\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} u-\frac{u^3}{3}+o(u^3)$ ainsi

$$f(t)=\frac{1}{t}-\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\underset{t\to+\infty}{=}\frac{1}{t}-\frac{1}{t}+\frac{1}{3t^3}+o\left(\frac{1}{t^3}\right)\underset{t\to+\infty}{=}\frac{1}{3t^3}+o\left(\frac{1}{t^3}\right)$$

Ainsi $f(t)\underset{t\to+\infty}{=}\frac{1}{3t^3}$.

2. f est continue sur $[1,+\infty[$, l'intégrale est donc impropre en $+\infty$.

De plus $|f(t)|\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{3t^3}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{3t^3}\,\mathrm{d}t$ converge par critère de Riemann.

Ainsi, par critère d'équivalence pour les fonctions positives $\int_1^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

$\int_1^{+\infty} f(t)$ est alors absolument convergente donc convergente.

3. Soit $x>1$, on a aisément $\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\ln(x)$.

On va procéder à une intégration par parties pour calculer $\int_1^x \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$.

Posons $u: t\mapsto \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ et $v: t\mapsto t$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,x]$, ainsi

$$\begin{aligned}\int_1^x \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t &= \left[t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right]_1^x-\int_1^x t\frac{-1}{t^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{4}+\int_1^x\frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\ &= x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{4}+\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^x\\ &= x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{\ln(2)}{2}\end{aligned}$$

Finalement

$$int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln(2)}{4}+\ln(x)-x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Il nous reste à déterminer la limite en $+\infty$ de $x\mapsto \ln(x)-x\arctan\left(\frac{1}{x}\right))-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Pour $x>1$ on a

$$\begin{aligned}\ln(x)-x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)-x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)-x\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)-1+o(1)\\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-1\end{aligned}$$

D'où
$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2} - 1$$

Corrigé de l'exercice 16

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^4}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\dfrac{1}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^4}$. Par comparaison à une intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ converge et donc, par continuité de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^4}$ sur $[0,1]$, $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ aussi.

   On procède de manière similaire pour J, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^4}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\dfrac{t^2}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$. Par comparaison à une intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ existe et donc, par continuité de $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^4}$ sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ aussi.
2. La fonction $u : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante.

   D'après le théorème de changement de variable, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{u^4}}\frac{1}{u^2}du$ converge et
   $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{u^4}}\frac{1}{u^2}$$

   Ainsi $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u = J$
3. On a
   $$I + J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^4)}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

   La fonction $\varphi : t \mapsto t - \dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle y est continue, strictement croissante, $\displaystyle\lim_{t\to0^+} \varphi(t) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$, ainsi d'après le théorème de la bijection continue, φ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ donc un changement de variable légitime. Pour $t \neq 0$ on a $\varphi'(t) = 1 + \dfrac{1}{t^2}$. Remarquons de plus que $\varphi(t)^2 + 2 = t^2 - 2 + \dfrac{1}{t^2} + 2 = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$.

   Alors
   $$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{t^2}+t^2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+x^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

   Or une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2+x^2}$ est $x \mapsto \dfrac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

On en déduit que $I+J=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$ et donc

$$I=J=\frac{I+J}{2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

Corrigé de l'exercice 17

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $t\geqslant 0$ on a $\left|\sin(t)^{2n}\mathrm{e}^{-t}\right|\leqslant \mathrm{e}^{-t}$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   D'où, par majoration $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\sin(t)^{2n}\mathrm{e}^{-t}\right|\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi les intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont absolument convergentes donc convergentes.
2. On a vu en cours que $I_0=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=1$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}$, on va effectuer des intégrations par parties.
   Posons $u:t\mapsto\sin(t)^{2n+2}$ et $v:t\mapsto -\mathrm{e}^{-t}$, u et v sont de classes $\mathcal{C}^1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0$.

   Ainsi, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(t)^{2n+2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, on a

$$\begin{aligned}
I_{n+1}&=\int_0^{+\infty}u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\lim_{t\to+\infty}u(t)v(t)-u(0)v(0)-\int_0^{+\infty}u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\\
&=0-0+(2n+2)\int_0^{+\infty}\cos(t)\sin(t)^{2n+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

   On va procéder à une seconde intégration par parties, posons $a:t\mapsto\cos(t)\sin(t)^{2n+1}$ et $b:t\mapsto -\mathrm{e}^{-t}$, a et b sont de classes $\mathcal{C}^1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}a(t)b(t)=0$.

   Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\cos(t)\sin(t)^{2n+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t&=\int_0^{+\infty}a(t)b'(t)\,\mathrm{d}t\\
&=0-0+\int_0^{+\infty}\left(-\sin(t)\sin(t)^{2n+1}+(2n+1)\cos(t)^2\sin(t)^{2n}\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{+\infty}\left(-\sin(t)^{2n+2}+(2n+1)(1-\sin(t)^2)\sin(t)^{2n}\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{+\infty}\left((2n+1)\sin(t)^{2n}-(2n+2)\sin(t)^2)\sin(t)^{2n+2}\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\
&=(2n+1)I_n-2nI_{n+1}
\end{aligned}$$

   On a donc $I_{n+1}=(2n+2)(2n+1)I_n-(2n+2)^2I_{n+1}$, d'où $I_{n+1}=\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)^2+1}I_n$
4. D'après la relation précédente on a, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$I_n=I_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2k+1)(2k+2)}{2k+2)^2+1}=\frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(4k^2+2)}$$

   Cette écriture ne se simplifie pas plus

Oral

Il est difficile de savoir exactement comment la question a été posée lors de l'oral, il est probable que l'examinateur a indiqué qu'il recherchait une écriture sous forme d'un produit

5. Tous les termes du produit étant positifs, I_n est donc positive. On a alors

$$\begin{aligned}\ln(I_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{(2k+1)(2k+2)}{2k+2)^2+1}\right)\\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{(2k+2)^2+1}{(2k+1)(2k+2)}\right)\\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{(2k+2)(2k+1)+2k+3}{(2k+1)(2k+2)}\right)\\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{2k+3}{(2k+1)(2k+2)}\right)\end{aligned}$$

Or

$$\ln\left(1+\frac{2k+3}{(2k+1)(2k+2)}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2k+3}{(2k+1)(2k+2)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k}$$

On sait que la série de terme général $\left(\dfrac{1}{2k}\right)_{k\geqslant 1}$ diverge, Ainsi, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série de terme général $\left(\ln\left(1+\dfrac{2k+3}{(2k+1)(2k+2)}\right)\right)_{n\geqslant 0}$ diverge

Puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs on a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{2k+3}{(2k+1)(2k+2)}\right) = +\infty$.

D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(I_n) = -\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Corrigé de l'exercice 18

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, il nous faut seulement traiter le problème au voisinage de $+\infty$.

   Par croissances comparées on a $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} s\mathrm{e}^{-s} = 0$, ainsi, par composition de limites, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\mathrm{e}^{-^2} = 0$.

   Ainsi $\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

   On sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que, pour tout $t \geqslant 1$, $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$, ainsi, par critère de négligeabilité pour les intégrales impropres, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument et donc converge.

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment ,elle converge donc.

   Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $t \mapsto \left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

   De plus $\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{t^{2n}}$.

   Comme $n \geqslant 1$ on a $2n > 1$, ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{t^{2n}}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Par critère d'équivalence pour les fonctions positives on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\,\mathrm{d}t$

converge, d'où, puisque $t \mapsto \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ est continue sur $[0,+\infty[$, que $\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t$

2. On va montrer dans un premier temps que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)\geqslant x+1$.

   Soit $f : x\mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour $x\in\mathbb{R}$, on a $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$.

   On en déduit la tableau de variations suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   Ainsi f est positive, d'où
$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \exp(x)\geqslant x+1$$

   Soit $n\in\mathbb{N}$ et $t\in[0,\sqrt{n}]$, on a alors, $1-\frac{t^2}{n}\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}}$.

   Comme $t\in[0,\sqrt{n}]$ on a alors $\frac{t^2}{n}\leqslant 1$ et donc $1-\frac{t^2}{n}\geqslant 0$.

   D'où, par croissance de la fonction $u\mapsto u^n$ sur $\mathbb{R}_+$,
$$\forall t\in[0,\sqrt{n}],\qquad \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\leqslant\left(\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}}\right)^n$$

   C'est-à-dire
$$\forall t\in[0,\sqrt{n}],\qquad \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$$

   Croissance

   La fonction $u\mapsto u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, elle n'est par contre croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier que si n est impair

   Soit maintenant $t\in\mathbb{R}$, on a alors $0<1+\frac{t^2}{n}\leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{n}}$.

   D'où, par croissance de la fonction $u\mapsto u^n$ sur $\mathbb{R}_+$
$$0<\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n\leqslant\left(\mathrm{e}^{\frac{t^2}{n}}\right)^n$$

   C'est-à-dire
$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad 0<\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n\leqslant \mathrm{e}^{t^2}$$

   Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ on a alors
$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}\geqslant \mathrm{e}^{-t^2}$$

3. Par croissance de l'intégrale on en déduit de la question précédente que
$$\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t$$

   La fonction $t\mapsto\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ étant continue et positive on a
$$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t=\int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t+\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t\geqslant\int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t$$

Finalement
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$$

4. Soit $\phi \; : \; \begin{array}{ccc} \left]0,\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \dfrac{\sqrt{n}}{\tan(u)} \end{array}$.

   ϕ est une fonction strictement décroissante (car la fonction tan est croissante), de classe $\mathcal{C}^1$ et on a $\phi\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right) =]0,+\infty[$. ϕ est donc un changement de variable licite.

   Pour $u \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a $\varphi'(u) = -\sqrt{n}\dfrac{1+\tan(u)^2}{\tan(u)^2} = -\sqrt{n}\left(1+\dfrac{1}{\tan(u)^2}\right)$.

   D'où $\mathrm{d}t = \sqrt{n}\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)\mathrm{d}x$ et donc $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{1}{1+\frac{t^2}{n}}\mathrm{d}t$

   Alors
$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^n}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^{n-1}}\frac{1}{1+\frac{t^2}{n}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{n}}{\left(1+\frac{n}{n\tan(u)^2}\right)^{n-1}}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{n}}{\left(1+\frac{\cos^2(u)}{\sin(u)^2}\right)^{n-1}}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{n}\sin(u)^{2n-2}}{(\sin(u)^2+\cos^2(u))^{n-1}}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}\sin(u)^{2n-2}\,\mathrm{d}u \\
&= \sqrt{n}W_{2n-2}
\end{aligned}$$

5. Soit $\psi \; : \; \begin{array}{ccc} \left]0,\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{n}\cos(u) \end{array}$.

   ψ est une fonction strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$ et on a $\psi\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right) = [0,\sqrt{n}]$. ψ est donc un changement de variable licite.

   Alors
$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1-\frac{\psi(x)^2}{n}\right)^n \psi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{n\cos(x)^2}{n}\right)^n \left(-\sqrt{n}\sin(x)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos(x)^2\right)^n \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(x)^2\right)^n \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^{2n+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{n}W_{2n+1}
\end{aligned}$$

6. D'après les question précédentes on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$$

   On sait que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Ainsi

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\sqrt{n}W_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2-\frac{2}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

D'après le théorème des gendarmes on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

C'est-à-dire

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$